

Varianta 30

Subiectul I

- a) $AB = 5\sqrt{2}$.
- b) $\cos^2 122 + \sin^2 122 = 1$.
- c) $S = \frac{7\sqrt{3}}{4}$.
- d) $\overline{-4 - i} = -4 + i$.
- e) $a = 1, b = -1$.
- f) $BC = \sqrt{41}$.

Subiectul II

1.

a) $\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 23 & -5 \end{vmatrix} = -20$.

b) $p = \frac{2}{5}$.

c) $x = \frac{1}{2}$.

d) $x = \frac{1}{49}$.

e) $C_6^2 - C_6^4 + C_6^6 = 1$.

2.

a) $f'(x) = \frac{-1}{(x+20)^2}$.

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{-1}{441}$.

c) $f'(x) = \frac{-1}{(x+20)^2} < 0, \forall x \in (0, \infty)$, deci funcția f este descrescătoare pe intervalul $(0, \infty)$.

d) $\int_1^2 f(x) dx = \ln \frac{22}{21} + 1$.

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$.

Subiectul III

- a) $\det A = 1$.
- b) Calcul direct.

c) $A - I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

d) Prin calcul direct se demonstrează $A^2 - 2A + I_2 = O_2.$

e) Notăm $P(n): A^n = \begin{pmatrix} 1 & 10n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, n \in \mathbf{N}^*.$

Evident $P(1)$ este adevărată..

Presupunând că $P(k)$ este adevărată pentru $k \in \mathbf{N}^*$, arătăm că $P(k+1)$ este adevărată.

$$A^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k \cdot \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 10k+10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{Deci } P(k+1) \text{ este (A).}$$

Ambele etape fiind verificate, concluzionăm că $P(n)$ (A), $\forall n \in \mathbf{N}^*.$

f) $\det(A - I_2) + \det(A^2 - I_2) + \dots + \det(A^n - I_2) = \sum_{k=1}^n \det(A^k - I_2) \stackrel{e)}{=} 0.$

g) $\det(A + A^2 + \dots + A^{10}) = \det\left(\sum_{k=1}^{10} A^k\right) = 10^2.$

Subiectul IV

a) $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$

b) $f'(x) \leq 0, \forall x \in (-\infty, 0]$, deci funcția f este strict descrescătoare.

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 1} = \infty.$

d) $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = 1, n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0.$

Deci dreapta $y = x$ este asimptotă oblică către $+\infty$ la graficul funcției f .

e) $\int_0^1 f'(x) dx = \sqrt{2} - 1.$

f) $f(x) = f(y) \Rightarrow x^2 + 1 = y^2 + 1 \Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow x^2 - y^2 = 0.$

g) Se verifică $x = 0$ este soluție. Dacă $x < 0$ atunci

$$\begin{cases} 11x > 21x \\ 1984x > 2004x \end{cases} \stackrel{b)}{\Rightarrow} \begin{cases} f(11x) < f(21x) \\ f(1984x) < f(2004x) \end{cases}. \text{Adunând membru cu membru cele două}$$

inegalități ajungem la contradicție cu relația dată. Deci ecuația nu are soluții pe intervalul $(-\infty, 0)$. Se arată că funcția f este strict crescătoare pe $(0, \infty)$ și obținem în mod analog că ecuația nu are soluții pe intervalul $(0, \infty)$. Prin urmare singura soluție este $x = 0$.